به نام خدا

متغیرهای تصادفی

درس بررسی احتمالی سیستمهای قدرت

بهنام محمدی ایواتلو

❑ مقدماتی از احتمال

- فضای نمونه (Sample space): یک مجموعه ای است که تمام حالات ممکن را پوشش می دهد.
- Elementary event: کوچکترین اجزایی که در فضای نمونه وجود دارد.
- event: به یکی از حالتهای ممکن یا چند تا از آن حالت ها گفته می شود.
- در احتمال یک بازه ای به صورت زیر در نظر گرفته می شود که نشان دهنده احتمال هر پیشامد می باشد.

۱≥احتمال هر پیشامد≥۰

- **مثال:** فرض کنید ۴ نیروگاه داریم که هر کدام از آنها ۵۵۰ مگاوات ظرفیت با احتمال خروج یا خرابی ۲۰٪ می باشند.

فضای نمونه برای ماکزیمم تولید در دسترس ⇒ $X = \{0, 550, 1100, 1650, 2200\}$

$$P(x = 2200) = (0.8)^4 = 0.4096$$

$$P(x = 1650) = \binom{4}{1}(0.8)^3(0.2) = 0.4096$$

$$P(x = 1100) = \binom{4}{2}(0.8)^2(0.2)^2 = 0.1536$$

$$P(x = 550) = \binom{4}{3}(0.8)(0.2)^3 = 0.0256$$

$$P(x = 0) = (0.2)^4 = 0.0016$$

❑ مقدماتی از احتمال

- **در احتمال همیشه مجموع احتمالات برابر با یک است.**

$$\sum_{i=1}^{4} P_i(x) = 1$$

برای داده های پیوسته ⟵ PDF: Probability density function

برای داده های گسسته ⟵ PMF: Probability mass function

CDF: Cumulative distribution function ⟵ در یک نقطه به این معناست که در هر نقطه احتمال از آن کم باشد.

متغیر تصادفی

- متغیر تصادفی: عمل تخصیص عدد به هر یک از خروجی های فضای نمونه

- متغیر تصادفی در حالت واقعی یک متغیر نیست بلکه پارامتر هست و تصادفی نیست چون معمولا به آن عدد اختصاص داده می شود.

$X(s), \quad s \in S$ ← فضای نمونه

CDF → $F_x(X) = P(X \leq x)$

X متغیر تصادفی، x یک نمونه خاص از متغیر تصادفی

CDF $\longrightarrow$ $F_x(X) = P(X \le x)$

- CDF از جنس احتمال است پس:

$$0 \le F_X(x) \le 1$$

- سایر ویژگیهای مهم CDF:

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

✓ غیر نزولی بودن $\longleftarrow$ $x_1 \le x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$

✓ از راست پیوسته است. $\Longleftarrow$ $p(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

❑ تابع توزیع احتمال

✓ CDF یک نقطه در حالت پیوسته صفر می شود. $P(X = x_i) = 0$

- برای متغیرهای تصادفی پیوسته (با CDF پیوسته) با عنوان تابع چگالی احتمال PDF بیان می شود.

$$P(X = x_i) = 0 \quad ; \quad f_X(x) \geq 0$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$$

CDF

PDF

❑ میانگین و انحراف معیار

میانگین

The mean and the standard deviation of a discrete population probability distribution are found by using these formulas:

$\mu = \Sigma x P(x)$; μ is called the **expected value** of x

$\sigma = \sqrt{\Sigma (x - \mu)^2 P(x)}$ is called the standard deviation of x

where x is the value of a random variable,
$P(x)$ is the probability of that variable, and
the sum Σ is taken for all the values of the random variable.

Note: μ is the *population mean* and σ is the underlying *population standard deviation* because the sum Σ is taken over *all* values of the random variable (i.e., the entire sample space).

$$SD = \sqrt{\mu}$$

SD (standard deviation) انحراف معیار که برابر با جذر میانگین است

❑ میانگین و انحراف معیار

مثال ۳: برای مثال ۱ میانگین و انحراف معیار را حساب کنید.

$$\mu = \sum_{i=1}^{4} x_i \, p_i \, (x_i)$$

- در میانگین هیچ وقت عدد در بین اعداد فضای نمونه نخواهد بود.
- یک عدد> میانگین عدد
- گفتن میانگین در قیود اصلا درست نیست.
  - چون ممکن است حالتهای دیگر رخ بدهد که میانگین آن را در نظر نگیرد بنابراین میانگین به عنوان مد خارجی استفاده نمی شود.
  - مثلا برای wind برای استفاده در شبکه نمی توان میانگین استفاده کرد ولی برای بحث های بازاری استفاده از آن درست می باشد.

❑ میانگین و انحراف معیار

- می توانیم در صورت جدا گرفتن نمونه ها واریانس را به صورت زیر حساب کنیم:

$$\sigma = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

تعداد کل فضای نمونه

- هدف از انحراف معیار این است که می خواهیم پراکندگی را داده ها را پیدا کنیم.

- واریانس به تنهایی نمی تواند پراکندگی داده ها را نشان دهد.

برای این منظور تابعی به نام ضریب تغییرات یا Coefficient of variance (Cov)تعرف شد

$$Cov = \delta_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$$

❑ مد و میانه

- **شاخص مد Mode :**

  - نقطه ای که بیشتر استفاده می شود یا به عبارتی بیشتر تکرار شده باشد.
  - نقطه ای که فراوانی آن بیشتر می باشد.
  - PMF یا PDF در آن نقطه ماکزیمم مقدار را دارد.

- **شاخص میانه Median :**

  - نقطه ای که CDF آنجا نیم باشد و از لحاظ احتمالاتی احتمال در قبل و بعد آن نقطه یکسان باشد.

❑ توزیع نمایی

$$f_x(x) = \lambda . e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$

$$\mu_x = \int_0^{\infty} x . \lambda . e^{-\lambda x} \, dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var = \int_0^{\infty} (x - \frac{1}{\lambda})^2 . \lambda . e^{-\lambda x} \, dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$Cov = \frac{\sigma}{\mu} = 1$$

❑ تعاریف مهم

- **Reliability function:**
  - مکمل CDF است.

$$R(x) = 1 - F_X(x)$$

- **Hazard function**

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{PDF}{1 - CDF} \xrightarrow{\text{مثال}} h(x) = \frac{\lambda . e^{-\lambda x}}{1 - (1 - e^{-\lambda x})} = \lambda$$

❑ تعاریف مهم

- **Skewness یا چولگی**

  - گشتاور سوم نرمالیزه شده می باشد.

$$\delta_x = \frac{1}{\sigma_x^3} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^3 f_x(x).dx$$

- **Kurtosis یا کشیدگی**

  - گشتاور چهارم می باشد.

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_x^4} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^4 f_x(x).dx$$

❑ توزیع دو جمله ای Binomial

Formula for the binomial probability distribution

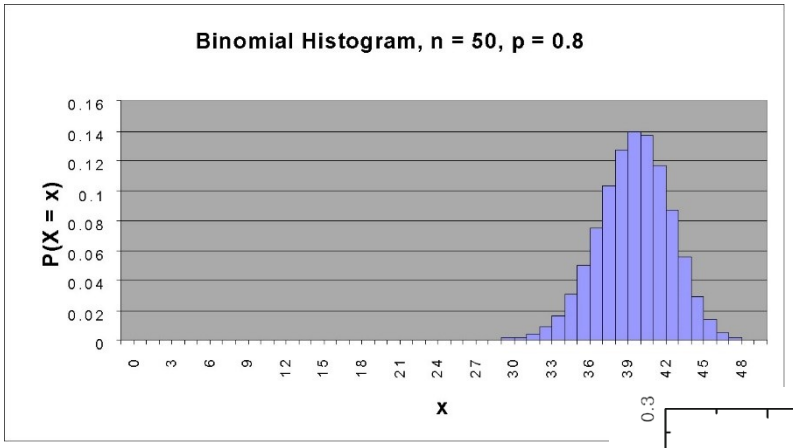
$$P(r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r} = C_{n,r} p^r q^{n-r}$$

where n = number of trials
p = probability of success on each trial
$q = 1 - p$ = probability of failure on each trial
r = random variable representing the number of successes out of n trials $(0 \le r \le n)$
! = factorial notation. Recall from Section 4.3 that the factorial symbol $n!$ designates the product of all the integers between 1 and n. For instance, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Special cases are $1! = 1$ and $0! = 0$.

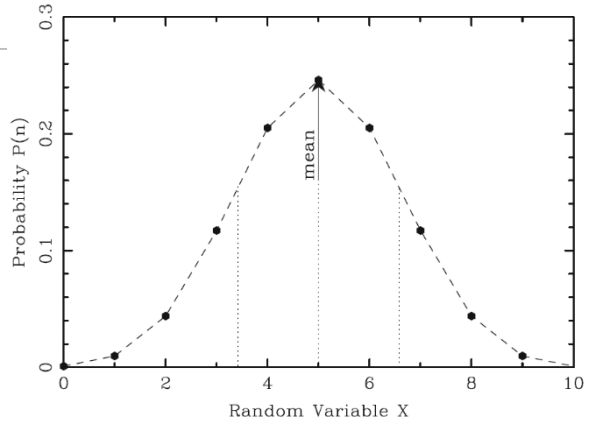
$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ is the binomial coefficient. Table 2 of Appendix II gives values of $C_{n,r}$ for select n and r. Many calculators have a key designated nCr that gives the value of $C_{n,r}$ directly.

❑ توزیع دو جمله ای Binomial

- هیستوگرام توزیع دو جمله ای برای احتمال پیروزی ۰/۸ و تعداد تکرار ۵۰



distribution with $p = q = 0.5$ and $N = 10$. The *dotted lines* around the mean mark the $\pm\sigma$ range



❑ توزیع دو جمله ای Binomial

مثال:

An airline knows that 5% of the persons making reservations will not show up at the gate. On a given flight that can seat 50 people, 52 tickets have been sold. Calculate the probability that there will be a seat available for every passenger that will arrive at the gate.

❑ میانگین و واریانس توزیع دو جمله ای

$$\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{N} P(n)n = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!n!} np^n q^{N-n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left[p\frac{\partial}{\partial p} \right] p^n q^{N-n};$$

$$\overline{n} = p\frac{\partial}{\partial p} \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n q^{N-n} \right] = p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N = pN(p+q)^{N-1} = pN.$$

Same method for calculated standard deviation.

❑ توزیع هندسی

- احتمال اینکه اولین پیروزی در n امین آزمایش باشد.

Geometric probability distribution

$$P(n) = p(1 - p)^{n-1}$$

where n is the number of the trial on which the *first success* occurs ($n = 1, 2, 3, \ldots$) and p is the probability of success on each trial. *Note:* p must be the same for each trial.

Using some mathematics (involving infinite series), it can be shown that the **population mean** and **standard deviation** of the geometric distribution are

$$\mu = \frac{1}{p} \quad \text{and} \quad \sigma = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

❑ توزیع پاسکال یا دو جمله ای منفی

- K امین پیروزی در آزمایش j ام رخ می دهد.

$$P(X_K = j) = \binom{j-1}{k-1} p^k q^{j-k}$$

مثال: پس از وقوع صاعقه، بریکر خط انتقال را با احتمال ۸۵ درصد قطع می کند. اگر بریکر ۵ بار متوالی درست عمل نکند تعویض می شود. احتمال اینکه بریکر در ۷ صاعقه بعدی در مدار باشد چقدر است؟

$$P(X_5 \geq 8) = 1 - P(X_5 \prec \quad \binom{4}{4} 0.15^5 0.85^0 -$$

$$\binom{5}{4} 0.15^5 0.85^1 - \binom{6}{4} 0.15^5 0.85^2 = 0.9988$$

❑ توزیع پواسون(Poisson Distribution)

- The Poisson distribution is popular for modeling the *number of times an event occurs in an interval of time or space*.
- *A* discrete random variable X is said to have a Poisson distribution with parameter λ > 0 if for k = 0, 1, 2, ..., the probability mass function of X is given by:

$$f(k;\lambda) = \Pr(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

- k is the number of occurrences
- The positive real number *λ* is equal to the expected value of *X* and also to its variance

$$\lambda = \mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X).$$

❑ توزیع پواسون(Poisson Distribution)

- Example: In a particular river, overflow floods occur once every 100 years on average. Calculate the probability of *two* overflow floods in a 100-year interval, assuming the Poisson model is appropriate

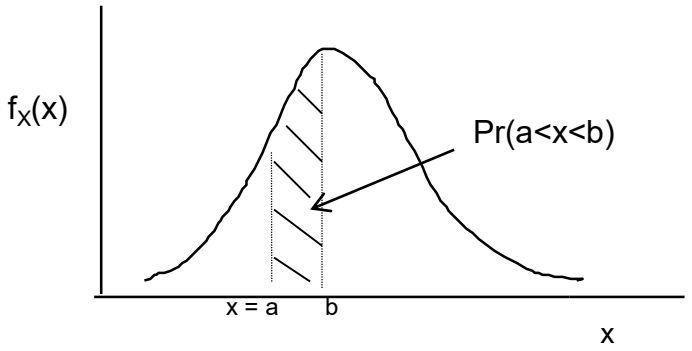
$$P(k \text{ overflow floods in 100 years}) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{1^k e^{-1}}{k!}$$

$$P(k = 2 \text{ overflow floods in 100 years}) = \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = \frac{e^{-1}}{2} \approx 0.184$$

❑ توزیع پیوسته-تابع چگالی احتمال

- Probability that X lies between the values a and b is the area under the graph of f_X(x) defined by x=a and x=b

$$\Pr[a \le X \le b] = \int_a^b f_X(x)\,dx.$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$$

❑ توزیع پیوسته-تابع توزیع تجمعی احتمال

- Cumulative distribution function (CDF) :

- The CDF is the integral between -∞ and x of fX(x)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du,$$

- moment of order n: $\mu_n \equiv \int f(x) x^n dx \equiv E[X^n],$

❑ توزیع پیوسته-تابع توزیع تجمعی احتمال

- Mean value:

$$\overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^{N} x_i \equiv E[X] = \sum_{j=1}^{M} f(x_j) x_j,$$

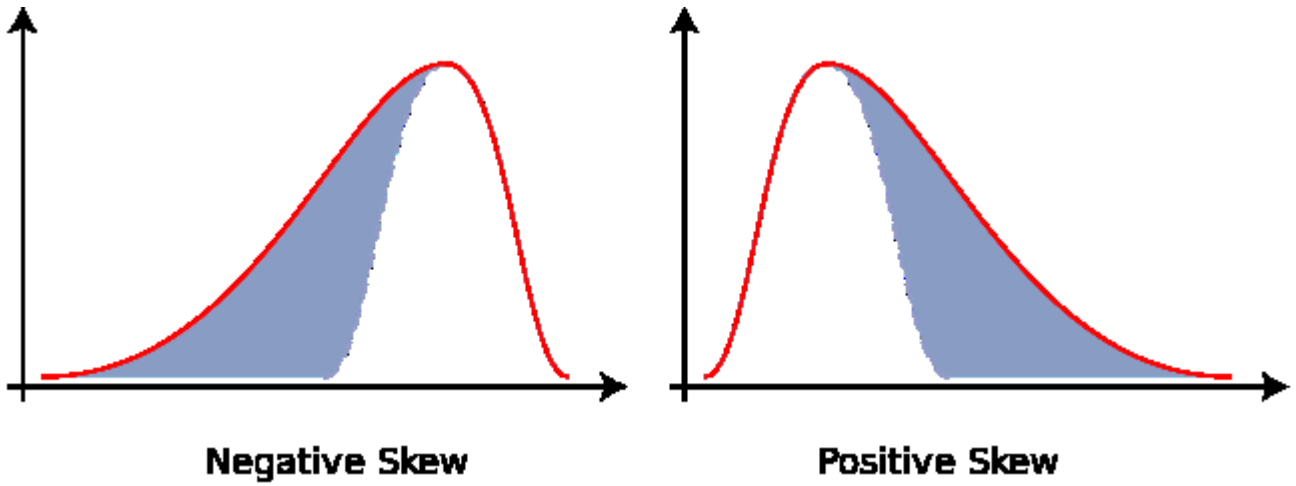
- Variance:

$$\sigma_x{}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \overline{X}\right)^2 f_x(x) dx = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \overline{X}\right)^2$$

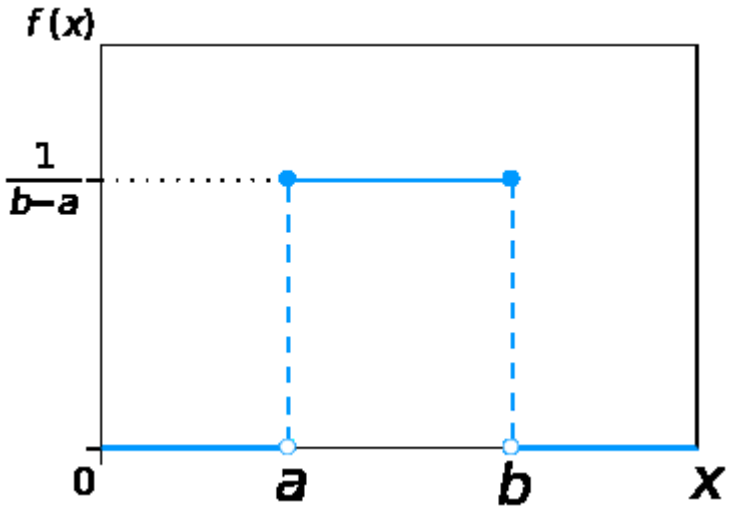
❑ توزیع پیوسته-تابع توزیع تجمعی احتمال

- Skewness:

$$s_x = \left(\frac{1}{{\sigma_X}^3}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\bar{X}\right)^3 f_x(x)dx = \left(\frac{1}{{\sigma_X}^3 N}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar{X}\right)^3$$



❑ توزیع یکنواخت (Uniform distribution)



- For a random variable with a uniform distribution in the range (a, b):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{for } a \le x \le b, \\ 0 & \text{for } x < a \text{ or } x > b \end{cases}$$

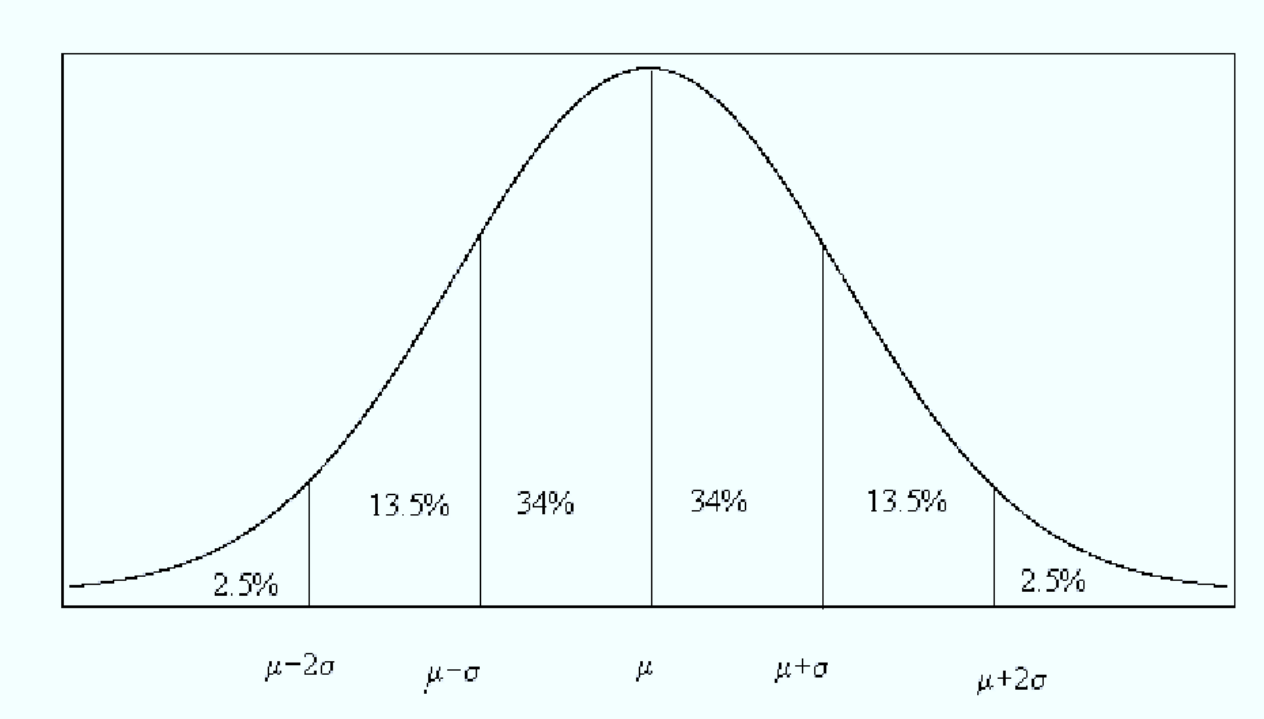
- Mean: $\mu = \frac{a+b}{2}$
- Variance: $\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$
- Example:

$X \sim U(0, 23)$

Find $P(2<X<18)$:

$$P(2 < X < 18) = (18 - 2) \cdot \frac{1}{23 - 0} = \frac{16}{23}.$$

❑ توزیع نرمال (Normal distribution)



$$P(Y \geq \mu) = 0.50 \quad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) \approx 0.68 \quad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$$

❑ توزیع نرمال (Normal distribution)

$$F_X(x) = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

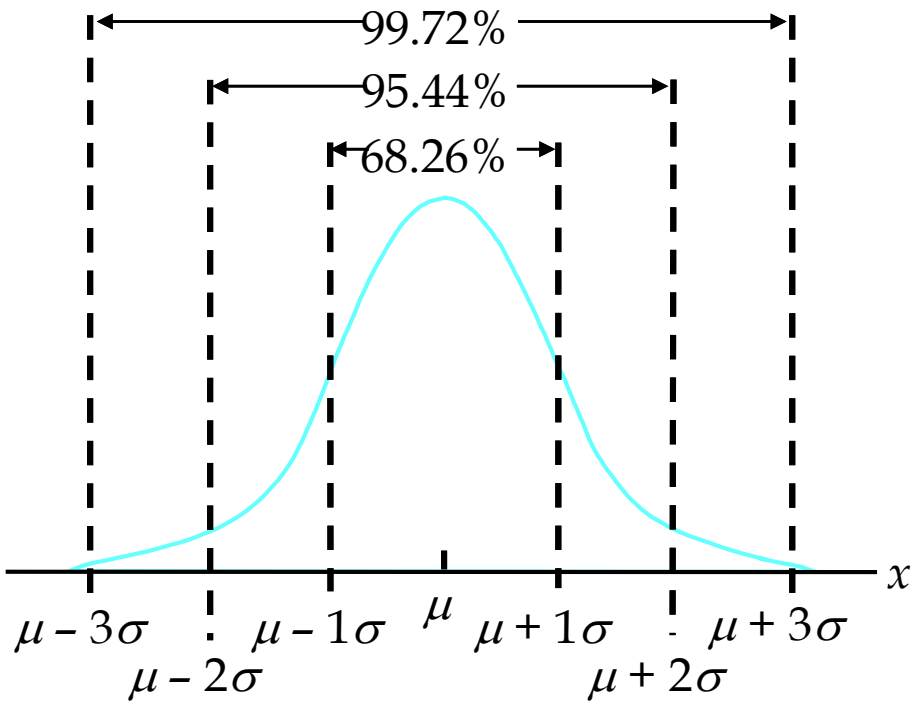
Where:

μ is the mean

σ is the standard deviation

π = 3.1459

e = 2.71828



❑ توزیع نرمال (Normal distribution)

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_x(x).dx$$

This cannot be calculated analytically

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

This has no analytical answer → Solution: Standard normal distribution

❑ توزیع نرمال استاندارد (Standard normal distribution)

- Suppose $X \sim N(\mu, \sigma)$

- $(X-\mu)/\sigma$ is also a normal random variable; we will denote it by Z:

$$Z = (X-\mu)/\sigma$$

- Z has mean 0 and standard deviation 1:

$E(Z) = \mu = 0$; $SD(Z) = \sigma = 1$.

$$Z \sim N(0, 1)$$

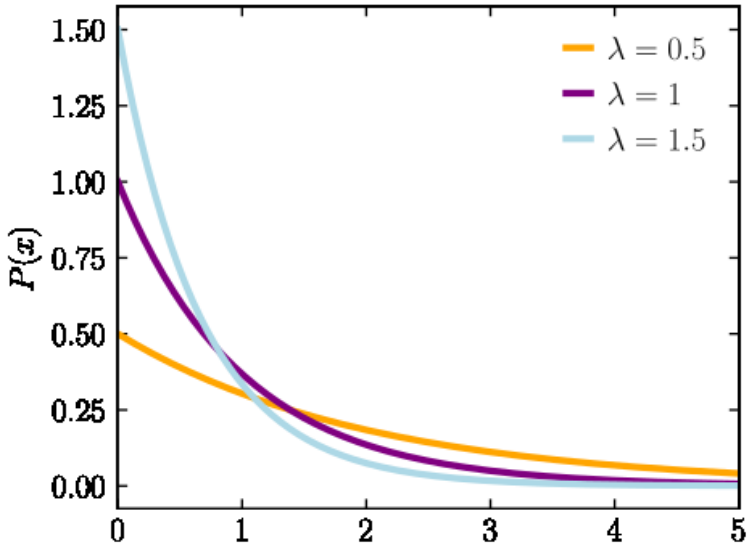
- The probability distribution of Z is called the standard normal distribution.

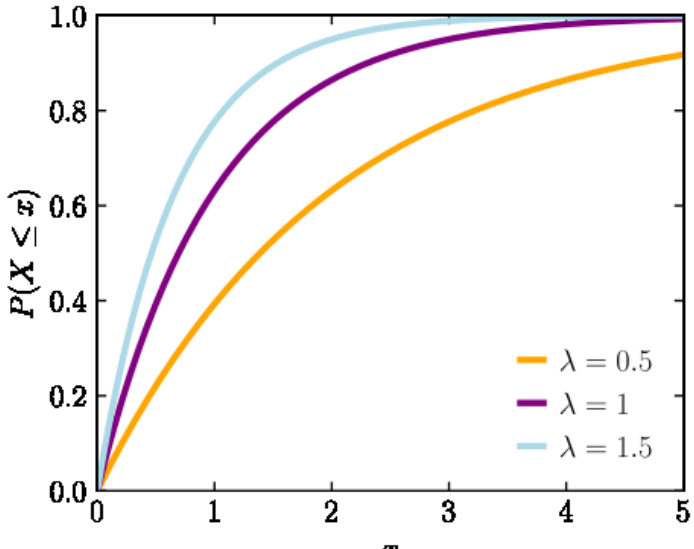
❑ توزیع نمایی(Exponential distribution)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

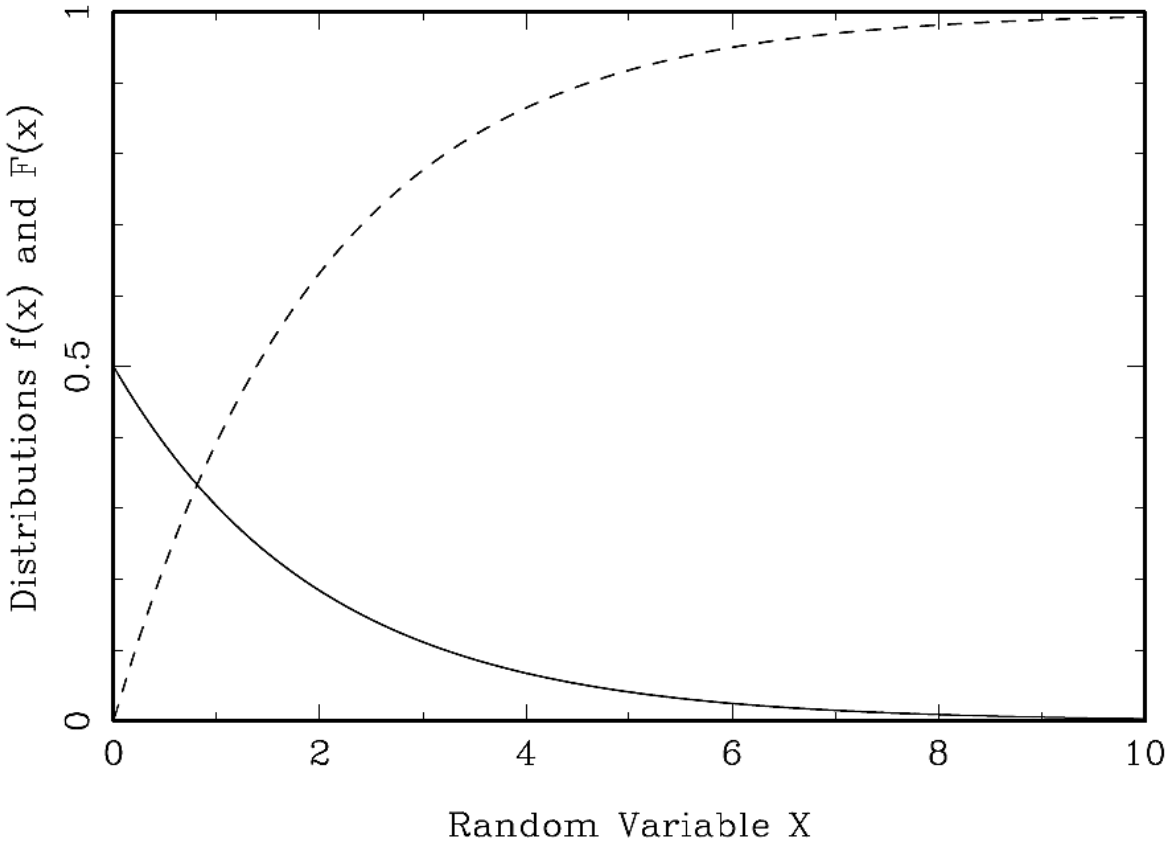
$$\mu = \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

- Median ?
- Mode ?





❑ توزیع نمایی(Exponential distribution)



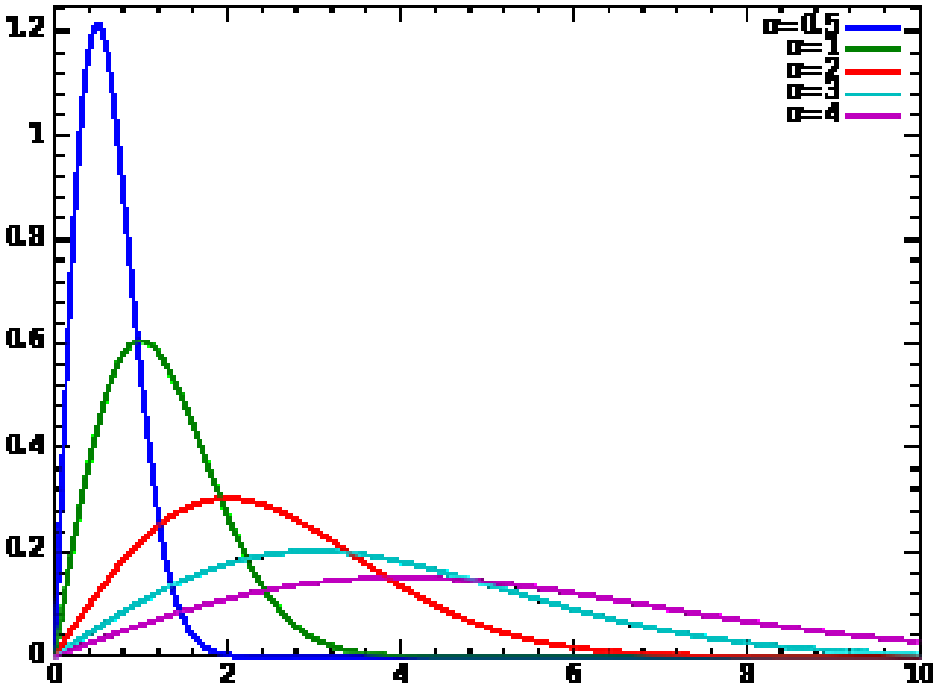
❑ توزیع رایلی(Rayleigh distribution)

$$f(x;\sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad x \geq 0,$$

$$F(x) = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$\mu(X) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.253\sigma$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2 \approx 0.429\sigma^2$$



- Rayleigh distribution is a special case of Weibull distribution.
- Used for two dimension winds peed modeling

❑ توزیع ویبال(Weibull distribution)

PDF → $f_x(x) = \left(\frac{kx^{k-1}}{c^k}\right)\exp\left[-\left(\frac{x}{c}\right)^k\right]$

k=2 → **Rayleigh**

k=1 → **Exponential**

CDF → $F_X(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{c}\right)^k\right]$

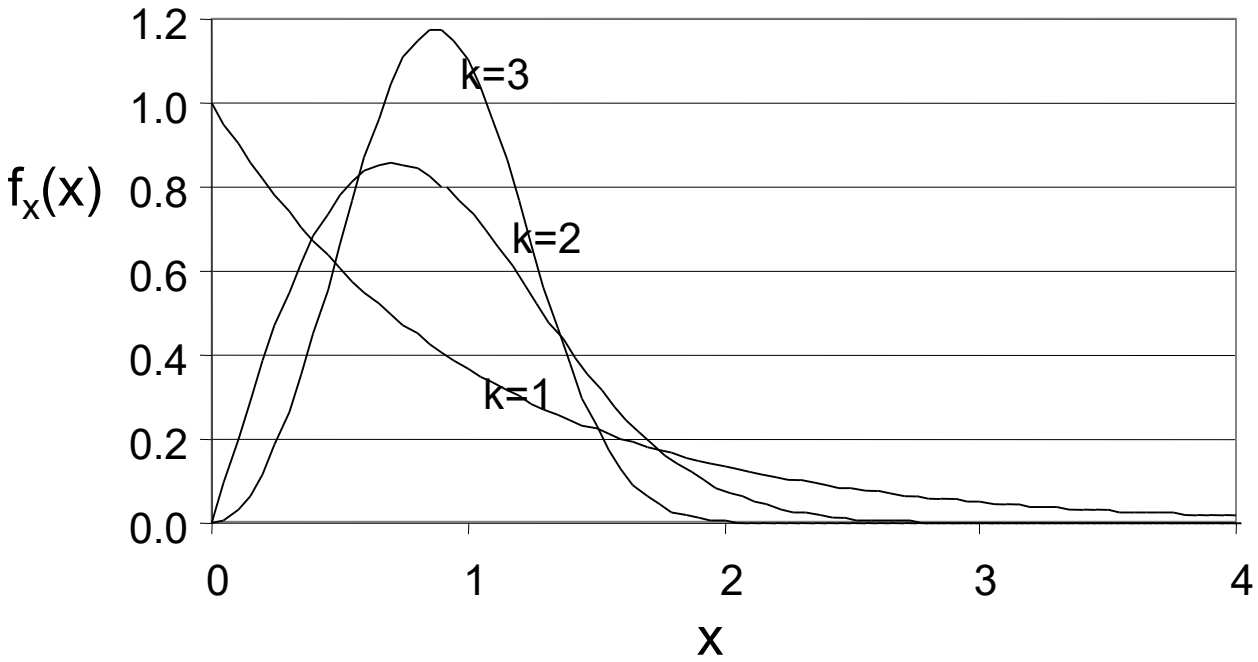
c = scale parameter (same units as X)

k= shape parameter (dimensionless)

X must be positive, but no upper limit.

- Weibull distribution widely used for wind speed modelling in power systems

❑ توزیع ویبال(Weibull distribution)



Special cases : k=1 Exponential distribution

k=2 Rayleigh distribution

❑ متغیرهای تصادفی چندگانه(Multiple random variables)

- Wind speed and direction are available and cannot be separated for analysis.

Or

- Location and type of fault are available and need to be considered simultaneously.

$$F_{X,Y}(x,y)=\sum_{X_i\le x}\sum_{Y_i\le y}p(x_i,y_i)$$

This would be marginal if each of them is computed individually.

$$P(X=x_i)=\sum_{y_i}p(x_i,y_i)$$

❑ PMF شرطی

$$P_{X/Y} = P(X = x / Y = y) = \frac{P_{XY}(x, y)}{P_Y(y)}$$

$$P_{XY}(x, y) = P_X(x) P_Y(y) \longrightarrow$$ **Example 19- Ch3**

$$F_{XY}(x, y) = p(X \le x, Y \le y)$$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \, \partial y}$$

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(\upsilon, U) d\upsilon dU$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx$$

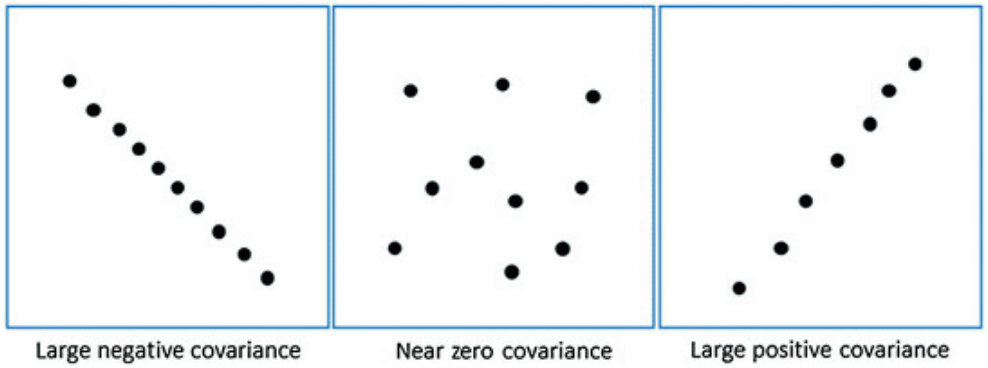
Covariance ❑

- Covariance indicates the measurements and relationships between x and y.

$$Cov(x, y) = E((x - \mu_x), (y - \mu_y)) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

If X and Y independent: → $Cov(x, y) = 0$

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$



Covariance ❑

Correlation coefficient $$\rho = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

